

### MAI 1 - nekonečné posloupnosti - další příklady.

1. Vypočítejte následující limity (nebo ukažte, že neexistují):

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$  ; b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$  ; c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}}{n}$  ; d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}}$  ;  
 e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$  .

2. Víte-li, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  , vypočítejte limity

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$  ; b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$  ; c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$  ; d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$  .

3. Věta o limitě monotónní posloupnosti.

a) Definujme rekurentně posloupnost  $\{a_n\}$ , kde

(i)  $a_1 = 2$  ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right)$  . Ukažte, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$  .

(ii)  $a_1 = \sqrt{2}$  ,  $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$  . Ukažte, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$  ;

b) Ukažte, že platí: je-li  $0 \leq a_n$  , pak posloupnost  $\left\{ \sum_{n=1}^N a_n \right\}$  konverguje nebo diverguje k  $+\infty$  .

c) Ukažte, že platí :

Je-li  $0 \leq a_n \leq b_n$  ,  $n \in \mathbb{N}$  , potom, konverguje-li posloupnost  $\left\{ \sum_{n=1}^N b_n \right\}$  , pak také konverguje

posloupnost  $\left\{ \sum_{n=1}^N a_n \right\}$  (tedy, konverguje-li řada  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  , konverguje i řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ).

(srovnávací kritérium konvergence řad)

Pokuste se rozhodnout (užitím tohoto tvrzení) o konvergenci , resp. divergenci, řady :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot \sqrt{n}} ; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2 + 3} ; \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 - 1} ; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1} ; \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n}{n^2 + 1} \right)^2 .$$

d) Ukažte, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty$  . (Návod: ukažte, že daná posloupnost není cauchyovská.)

## 4. Problémky:

Dokažte následující tvrzení:

a) Necht'  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}$  a necht' platí  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - b_n| < \varepsilon$ . Potom také  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

b) Necht' posloupnost  $\{a_n\}$  je cauchyovská,  $\{a_{n_k}\}$  je posloupnost vybraná z  $\{a_n\}$  a necht'

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a. \text{ Potom také } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

c) Je-li  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a > 0$ , pak je  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ . Zvažte, zda tvrzení platí i pro  $a = 0$  ( $a_n > 0$ ).

5. Ukažte, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ .

## 6. Ještě „aritmetika“ limit:

a) Je-li  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , co lze říci o  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ ? Tvrzení dokažte.

Na příkladech ukažte, že nelze formulovat žádné pravidlo pro součet v případě, že  $a = \infty$  a  $b = -\infty$ .

Co lze říci (a co nelze) pro  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$ ?

b) Spočítejte limity:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + n^4}{n^2 + n!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n!}{n^4 + 4(n+1)!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + \sin n! + n!}{n^3 + 2n!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n n!}{3n!}.$$

## 7. Spočítejte limity:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n}\right).$

## 8. Ještě cauchyovské posloupnosti:

Ukažte, že neklesající, shora omezená posloupnost je cauchyovská.